目白大学　人文学研究
第11号　2015年　1－16

論議領域とアポーハ代数
―否定名辞の外延的意味―

Universe of Discourse and Apoha Algebra
―Extensional Meaning of a Negative Term―

上田　昇
Noboru UEDA

Keywords：Indian logic, Cantor set, apoha
キーワード：インド論理学、カントール集合、アポーハ

はじめに

　インド論理学（および仏教論理学）は「否定」をさまざまに論じるが、代表的な否定論のひとつに定立的否定（paryudāsa）と非定立的否定（prasajya-paratiṣedha）の区別がある。たとえば、否定名辞「非バラモン」（a-brāhmaṇa）の意味は否定辞（a-）の解釈に依存し、これを定立的否定と解釈すればクシャトリヤやヴァイシャといったヴァルナ（カースト）であり、他方非定立的否定と解釈すれば単にバラモンに非ずというだけであるとされる[1)]。このうち、定立的否定の場合、「非バラモン」が牛や馬を意味することは通常の文脈では考えられない。「非バラモン」はあくまでバラモン以外のヴァルナを意味する。つまり、ここには西洋の伝統的論理学でいうところの論議領域（universe of discourse）が暗黙のうちに設定されており、いまの場合は（四種の）ヴァルナの領域が論議領域であると考えられる。（「非バラモン」が牛や馬を意味する可能性を認めなくてはならない文脈も想定はできるであろう。）

　ところで、その西洋の伝統的論理学は、20世紀に入って、集合論（カントール）と記号論理学の登場・発展によって、論理学史の「博物館」に入った感がある。現代のインド論理学研究者も、しばしば集合論や記号論理学の方法を採り入れる。例えば、否定名辞の外延的意味について一般的に行われている解釈は、元の名辞の外延の補集合というものであるが（上の例で言えば、「非バラモン」の外延は「バラモン」の外延の補集合とされる）、これは述語論理学における否定解釈の発想に倣っていることを意味するであろう。このとき、いわゆるオイラー図やヴェン図を用いて否定名辞の外延が元の名辞の外延を表す円（単純閉曲線）の外側の領域として表示されたりもするが、それに伴って全体集合が長方形などで描かれる。しかし、これも

うえだのぼる：看護学部看護学科教授

集合論を前提としているからであって、そもそもはオイラー図は伝統的論理学の三段論法を説明するための図として考案されたものであり、全体集合は描かれていなかった[2)]。

Prior（1962）によれば、論議領域（全体）を表す円をオイラー図に追加することは、否定名辞を含む三段論法解釈に関連してKeynes（1894）が行い、さらにJohnson（1921年の著作[3)]）が円を四角に代えたという。論議領域を表す図の導入は、Boethius（5-6世紀）による否定名辞を含む三段論法解釈の不十分さを補うためであった（Prior, ibid.）。

インド論理学―アリストテレス自身の三段論法と異なり、否定名辞が頻出する―においても、また西洋の伝統的論理学においても（自覚的な）補集合概念は存在しなかったのであるから、補集合による否定名辞の意味解釈が必然的であるか否かは検討の余地があるであろう。我々はひとまず集合論成立以前に立ち返って否定名辞の外延的意味を考えてみたい。本論はde Morgan（1860）とKeynes（1894）に拠って、「集合論以前」の否定名辞論を検討した上で、否定名辞の外延について補集合に拠らない別の解釈が可能であることを示し、その解釈の特徴を論じる。

1　論議領域（Universe of Discourse）

Keynesは論議領域（universe of discourse）について次のように述べている。

> It will be remembered that we are at present working on the assumption that each class represented by a simple term exists in the universe of discourse, while at the same time it does not exhaust that universe; in other words, <u>we assume that S, not-S, P, not-P, all represent existing classes</u>.　Keynes（1894, p.106.下線は引用者）

ここでSとPは“simple term”であるが、― complex term はconjunctive combination（SP）とdisjunctive combination（S or P）の二種類ある（ibid., p.56）― not-Sおよびnot-Pはsimple termとcomplex termのいずれでもないようである。ともあれ、S, not-S, P, not-Pが表すクラス（class）は全て存在するとされる[4)]。

さらにKeynes はXとnot-Xが排中律（Excluded Middle）を満たすと述べて、Xとnot-Xの二語は全体を尽くすと言う（A pair of terms ... exhaust the entire universe to which reference is made, ... Everything is X or not-X. Ibid., p.49）。

従って、集合論の言葉を使うならば、non-Xの表す対象領域はXの表す外延（集合）の「補集合」ということになるであろう。しかしここで問題が生ずる。Keynesは、肯定名辞は何らかの確定した属性の存在を含意する（a positive name implies the presence of certain definite attributes）のに対し、否定名辞は何らかの確定した属性の不在を含意する（a negative name implies the absence of one or other of certain definite attributes）、と言う。そして、否定名辞（negative name）について、その指示作用が間接的であることを述べる中で次のように言う。

> A strictly negative name has its denotation determined indirectly. It denotes <u>an indefinite and unknown class outside a definite and limited class</u>. In other words, we first mark off the class denoted by the positive name, and then <u>the negative name denotes what is left</u>. The fact that its denotation is thus determined is the distinctive characteristic of the negative name. （Ibid., p.51下線は引用者）

下線部のようにKeynesは、否定名辞の表す対象領域を（元の）肯定名辞が表す対象領域の「残り（what is left)」としながらも、それは「不確定な未知のクラス（an indefinite and unknown class)」とするのである。

De Morgan（1860）は名辞（term）の使用をobjectiveな使用とsubjectiveな使用とに分け、さらに前者を対象（object）を表示する名辞（name)、および性質（quality）を表示する名辞（name）に分け、後者をクラス（class）を表示する名辞、および属性（attribute）を表示する名辞に分けている（*Syllabus*, p.37-38)。このうち、クラス（class）はa collection of individual objects, named after a quality which is in thought as being in each oneとされ、一方、属性（attribute）はthe notion of quality as it exists in the mind to be given to a classとされる。そして、属性と個体的性質の関係は、クラスと個体的対象の関係と同じである（Attribute is to individual quality what class is to individual object）と述べている（ibid., p.38)。
否定名辞についてde Morganは論議領域（universe）との関連において次のように言う。

> The whole extent of matter of thought under consideration I call the *universe*...Every term which is used divides the *universe* into two classes; one within the term, the other without. These I call contraries: and I denote the contrary class of X, the class not-X, by x.（p.39）

つまり、どの名辞Xもuniverseを二分し、その名辞Xの表示するクラスの外側に否定名辞not-Xが一つのクラスを形成するのである。続けてde Morganは述べる。

> When the universe is unlimited contrary names are of little effective use; not-man, a class containing every thing except man, whether seen or thought, is almost useless. It is otherwise in a limited universe, in which contraries, by separate definiteness of meaning, cease to be mere negations each of the other, and even acquire separate and positive names.（p.39）

このように、de Morganは、universeが限定されていない（unlimited）なら、manを除くあら

ゆるものを含むnot-manなるクラスはほとんど無意味であるとする一方で、universeが限定される（limited）なら、否定名辞は単なる否定ではなくなり肯定名辞にすら転ずる、と言う。

De Morganの最後の主張は、たとえば「無理数」に良く当てはまる。Universe を実数全体とするとき、有理数の属性（quality, attribute）は整数の比で表せるということであるが、一方その属性を持たない対象が「有理数ではない」実数であり、転じて「無理数」である。

一般的に否定名辞は、しかし、universeを限定したとしても、その外延は不確定なところがある。それは、外延の決定要因としての内包（属性：quality, attribute）が確定し難い場合、殊にそうである[5)]。そこで、もし外延を決定する内包的条件が確定できるならば、否定名辞が表示する外延（クラス）はより明瞭なものになるであろう。De Morganは語と対象の関係を次のようにも論じている。

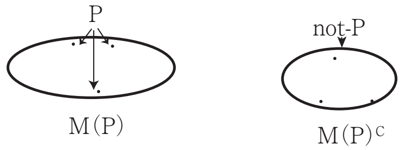
名前（name）は対象（object）に付せられた単なる印（mark）である（a name is a mere mark, attached to an object, p.10）。そして、例えば‘Every man is an animal’は次のように取り扱われる。‘Every object which has the name m-a-n has also the name a-n-i-m-a-l.’（Ibid.）そして、名前Xを持たない対象（object）を名前xで印づける（ここでxは事実上not-Xの省略形である）（Let every object which has not the name X（*of which there are always some*）be conceived as therefore marked with the name x, meaning not-X, and called the contrary[6)] of X. p.12-13）。すると、対象はXかxのいずれか一方である（every thing is either X or x; nothing is both, p.13）。こうして、x すなわちnot-Xを名前に持つ対象全体は、Xを名前に持つ対象全体の事実上の補集合として定まる。このように、名前Xを持たない対象を名前not-Xで印づけるとき、「名前Xを持たない」ことが、この対象が名前not-Xを持つための唯一の内包的条件になる（これを「内包」と呼べるかは問題だが）。

以上のように、Keynesおよびde Morganは否定名辞の外延（クラス）を事実上（元の）名辞の外延の補集合と捉えているのであるが、それは集合論が生まれる以前のことであり、彼らに「補集合」という概念を要求することはできない。Keynesの場合、否定名辞の外延がどのようにして確定するかはさほど明瞭でない。また、de Morganは実質的には、名辞の外延の決定要因から「内包」の関与を避けようとしているように見える。

ここで、集合概念を使用して、名辞とその否定名辞、およびそれらの外延について本論に於ける用語上の取り決めを述べておきたい。

先ず、名辞Pについて、それを名前に持つ対象の集合をPの外延と呼んでM(P) で表す。すると、Pを名前として持たない対象の集合は（全体集合は所与として）M(P) の補集合である。M(P) の補集合を$M(P)^C$で表す。De MorganおよびKeynesは「Pを名前として持たない」ものをただちに「not-Pなる名前を持つ」ものと見た、言い換えれば、$M(P)^C$の要素はnot-Pなる名前を持つとしたが、「Pを名前として持たない」ことと「not-Pなる名前を持つ」ことは別の事態であると考えられるから[7)]、$M(P)^C$の要素を無名と見ることもできるであろう。この場合、

Pの否定名辞not-Pは集合M(P)^{C}の名前と考えることができる。否定名辞not-Pの意味作用（指示機能）はM（P）の補集合M(P)^{C}に及ぶが、その要素には及ばないとするのである。

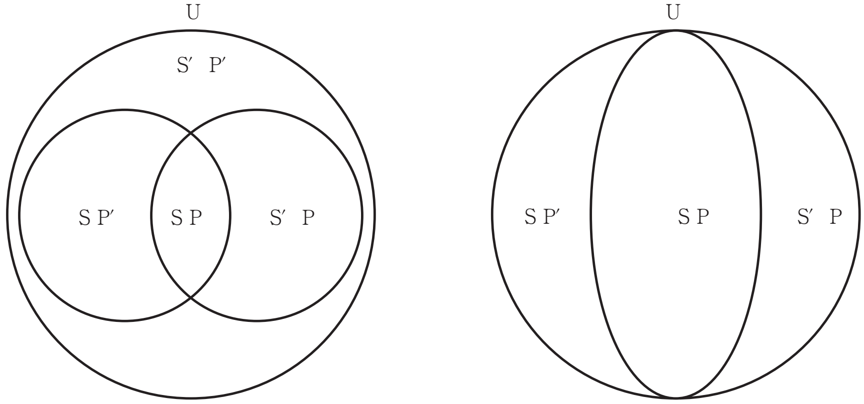


not-Pは集合を意味し、その集合の要素の名前ではない、ということはKeynesがオイラー図に導入したuniverse（論議領域）の名前Uの場合と似ている。なぜなら、もしUがKeynesの言う名辞（simple term）としてuniverseの要素を名指すなら（Uがclassなら）、Keynesの要請する前提から、not-Uによって名指される対象が存在しなければならないが、Uの意味からそのような対象は存在し得ない。従って、名辞Uはuniverse（集合）の名前ではあるが、その要素の名前ではない（de Morganはuniverseにおける対象を悉く名指す名前は「不要である」としている[8)]）。以下で我々はM(not-P）をM(P）の補集合M(P)^{C}の意味で使用するが、このときnot-PはM(P)^{C}における対象を名指さないものとする。

２ Lambert's diagramsとカントール集合

本節は伝統的論理学における論議領域すなわちuniverse（of discourse）のモデルをKeynesの考えを採り入れながら提示する。

先に引用したように、Keynesは“we assume that S, not-S, P, not-P, all represent existing classes”と述べていた。この前提の下で外延の状況をKeynesは７種類に分けて図示しているが、その中から二つをあげれば次のような図である（Keynes, p.142）。



（S′ はnot-Sを、P′ はnot-Pを意味する。S P 等はS and P等を表す。なおuniverse全体を表すUは肯定名辞のみの場合の図に準じて補足した。）

右の図は「not-Sかつnot-P」なる対象が存在しない状況を示している。Keynesはこのよう

なオイラー図（７種類）のいずれかが、universeを構成する任意の名辞のペアについて描けるとするのである。

一般にオイラー図の円（単純閉曲線の内部）は語の外延を表す（universeにおけるすべての対象を表す語はde Morganの言うとおり不必要であろう）。この表示法の特徴は有限の大きさの二次元の連結領域によって語の外延が表象されるという点にあると思われる。

Keynes はuniverseを長方形で表し、それを幾つかの小さな長方形に分割する図による表示法も提示している。すなわち、

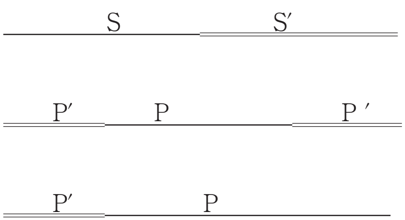
S P	S P′	S′ P	S′ P′

や

S P	S P′	S′ P

などである。(p.142, n.1)

一方でKeynesはLambert's diagrams として線分による表示法を紹介している（Keynes, p.145)。例えば、



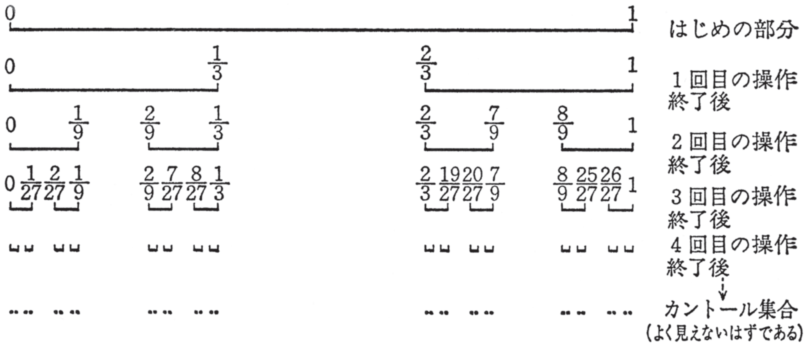
なる図は、一段目の線分がSとnot-Sの外延の状況を表し、二段目と三段目がPとnot-Pの状況を表している。すると、一段目と二段目を組み合わせれば、先に描いた左のオイラー図と外延の関係は同じ状況になり、一段目と三段目を組み合わせれば、右のオイラー図と同じになる。

Lambert's diagramsの特徴は名辞の外延を線分[9] として表示する点にあるが、否定名辞の外延は必ずしも一つの連結領域である必要はないようである。

さて、アリストテレス以来の「伝統的論理学」において、universe（論議領域）における対象は動物、植物、鉱物といった身近な事物が典型的であったと考えられる。従って、以下に設定するような「点集合」に基づく種・類構造を持つuniverseは伝統的論理学的とは言い難い。むしろ集合論を前提とした上で、そこに種・類といった伝統的論理学の概念を持ち込むものである。

我々はまず、実数上の閉区間 [0, 1]をとる。ここで、カントール集合（3進集合）を考える。松本（1985）によるカントール集合の説明は次のようである。

> ひとつの線分、たとえば、数直線上の単位区間I = [0, 1] = {x ｜ 0 ≦ x ≦ 1}をとる。その線分を3等分して、真中の開線分を取り去る。単位区間Iの場合なら、1/3 < x <2/3 に相当する部分を取り去るのである。すると、2つの線分[0, 1/3], [2/3, 1]が残る。残った2線分の各々を3等分して、真中の開線分を取り去る。今度は、4つの線分[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]が残る。以下同様に、残った線分の各々をそれぞれ3等分して、真中の開線分をとり除く。この操作を無限回実行しても、なお、数え切れない程たくさんの点（非可算無限個の点）が残る。このようにして残った図形がカントール集合とよばれる‘図形’である。



（松本p.10-11）

明らかにカントール集合は区間Iにおける任意の開区間（P_1, P_2）（ここで$P_1 < P_2$）を含まない[10)]。

いまI_0によって上のカントール集合を表す。単位区間Iからカントール集合を取り除いた集合 $I - I_0$ は可算無限個の開線分から成るから、集合 $I - I_0$ を形成する各々の開線分に名前を付け、$U_1, U_2, U_3, \ldots$ とできる。開線分 U_i について次のことが成り立つ。

- $I - I_0 = M(U_1) \cup M(U_2) \cup M(U_3) \cup \ldots$（$M(U_i)$ は開線分そのもの―実数の部分集合―を表す）
- $i \neq j$のとき、$M(U_i) \cap M(U_j) = \phi$

ここで、I（=[0, 1]）上に論議領域（universe）のモデルを作る。いま、U_i（i=1, 2, 3, …）を悉く最低種と見なす。「最低種」とは、それ自身より下位の―すなわち外延がより小さい―種（class）を持たない種のことである[11)]。そして、種名Pについてその外延M(P)は開線分U_iの有限個の和集合で表示されるものとする。すなわち、一般的に種の外延は、{$M(U_i)$}（i=1, 2,

3, …）から適宜有限個の要素をとってきて、それらの和集合であるとする。M(P)⊆M(Q) のとき、QはPの上位種（PはQの下位種）と呼ぶ。例えば、$M(P)=M(U_1)\cup M(U_2)\cup M(U_3)$, $M(Q)=M(U_1)\cup M(U_4)$ のとき、$M(P)\cap M(Q)=M(U_1)$ であるから、P, QはいずれもU_1の上位種である。

種名Pについて、例えば、$M(P)=M(U_1)\cup M(U_2)\cup M(U_3)$ のとき、universe は単位区間Iだから、$M(\text{not-P})= M(P)^C = I - M(U_1)\cup M(U_2)\cup M(U_3)$ となる。（このとき否定名辞not-Pが種名でないことは、universeが無限個の最低種を含むことから明らか。“not-P” はM(P) の補集合$M(P)^C$ の名前にすぎない。）

Keynesがuniverseを“最低種”の外延から成ると考えたかどうかは分からない。また、伝統的論理学において最低種を個体とする立場もあったと言われる[12)]。しかし、上のように、I上で開線分U_iによって最低種を表し、それらの有限個の和集合によって種ないし類を構想することは、すべての名辞（種名）と否定名辞が外延を持つというKeynesの要請を満たすものであり、伝統的論理学における論議領域（universe）の一つのモデルとして許されるであろう[13)]。

ところで、明らかに$I_0 \subset I - M(P)= M(P)^C = M(\text{not-P})$ である。しかし、I_0（カントール集合）の定義（作り方）から、I_0に種名の外延—開線分U_iの要素—は含まれない。つまり、M(not-P) には一切の種名を持たない対象（無名の対象）が紛れ込んでいることになる[14)]。M(not-P) から無名の対象を取り除く一つの方法はuniverseをあらかじめ$I - I_0$ と設定しておくことであるが、我々は、そもそも否定名辞の外延を元の名辞Pの外延の補集合$M(P)^C$ とするという否定解釈のありかたを変えることによって、この問題に対処しようと思う。

3　アポーハ代数

否定名辞の外延を「補集合」に拠らずに求めるため、ここで「アポーハ代数[15)]」を取り上げる。

アポーハ代数の定義。

語群ωと対象の集合Uが与えられているとする。また、各々の対象について各語の適用の可否が決まっているとする。（De Morgan的に表現するならば、各対象が各名前を持つか否か決まっているとする。）この時、語群ωの任意の語Xについてその「外延」および「排除対象」を次のように定義する。

　語Xの外延 M(X)：= 語Xが適用できる対象全ての集合

　語Xの排除対象 D(X)：= 語Xが適用できない対象全ての集合

ここで、$M(X)\cup D(X)=U$が成り立つものとする。また、定義から、明らかに$M(X)\cap D(X)=\phi$である。なお、対象の集合U、言い換えればuniverseの名前は語群ωには含まれないものとする。（これは、universeの名前をすべての対象が共通に持つ事態をde Morgan が避けようとしたことに対応する。Cf. 注8）

次に関数hとgを定義する。

関数h：ωのベキ集合2^{ω}（ωの部分集合の集合） → Uのベキ集合2^{U}.

$\alpha \in 2^{\omega}$ に対して、$h(\alpha) := \alpha$の各要素の外延の和集合

$= \cup M(X)$（ここで$X \in \alpha$）.

関数g: $2^{U} \rightarrow 2^{\omega}$.

$t \in 2^{U}$ に対して、$g(t) := \{X \in \omega \mid h(\{X\}) \cap t = \phi\}$.

この定義は、$g(t)$ は $h(\Gamma) \cap t = \phi$ となる最大の$\Gamma \subseteq \omega$ である、と定義することと同等である。

アポーハ代数を定義する。

語群ωのベキ集合2^{ω}の中に次のように集合$S(\omega)$を帰納的（回帰的）に構成する。

（１）$X \in \omega$ のとき、$[X] := g(D(X)) \in S(\omega)$.

（２）$\Omega \in S(\omega)$ のとき、$gh(\Omega) \in S(\omega)$.（$gh(\Omega)$は$g(h(\Omega))$の簡略形）

（３）$\alpha, \beta \in S(\omega)$ のとき、$\alpha \cup \beta \in S(\omega)$, $\alpha \cap \beta \in S(\omega)$.

こうしてできる$S(\omega)$をアポーハ代数と呼ぶ[16)]。また、$X \in \omega$について[X]をXの付値と呼ぶ。

なお、$D(X) = M(X)^{C}$より、明らかに（1）は次の（1a）と論理的に等価である。

（1a）$X \in \omega$ のとき、$[X] := \{Z \in \omega \mid h(\{Z\}) \subseteq h(\{X\})\}$.

各命題変項に対してアポーハ代数$S(\omega)$の値（付値）が与えられているとき、次のように付値を論理式一般に拡大することができる（ただし、含意記号→の現れない論理式に限定する）。論理式Pに対する付値を[P]で表す。

$P = Q \wedge R$ のとき、$[P] := [Q] \cap [R]$（Q, Rは論理式（命題変項の場合を含む））

$P = Q \vee R$ のとき、$[P] := [Q] \cup [R]$

$P = \mathrm{non}Q$ のとき、$[P] := gh\,[Q]$

（$gh\,[Q]$は$g(h([Q]))$の簡略形である。以下しばしば丸括弧を省略した類似の簡略形を用いる。）

一般的に、語群ωにおける語を命題変項と見て、それらから構成される論理式を「拡大された語」と呼ぶことにする。$P, Q \in \omega$のとき、nonP, nonQ, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $\mathrm{non}P \wedge Q$, $\mathrm{non}P \vee \mathrm{non}Q$等はそれぞれ拡大された語である。$X \in \omega$の場合、（1a）より$h\,[X] = h\{X\} = M(X)$であるから、Xが拡大された語の場合も含めて、h[X]を語Xの外延と呼ぶ。（ただし、$h[X \wedge Y] = h\,[X] \cap h\,[Y]$ は必ずしも成り立たない。後述。）

さて、語Xについて、その否定名辞nonXの付値$[\mathrm{non}X] = gh[X]$は、g, h の定義により、Xと外延上共通部分を持たない（ωの）要素から成る集合を意味する。三段論法の全称否定命題を用いて言い換えるならば、[nonX] = No Z is X となるZすべての集合（$Z \in \omega$）である。ここには「補集合」概念は現れない。オイラー図上で考えるならば、語Xの外延を表す円（単純閉曲線）と交わらない円によって表象される外延を持つ語$Z \in \omega$の集合が [nonX] であり、それ

らZの外延M(Z)すべての和集合がnonXの外延h [nonX]になる。

これをいま前章で取り上げたuniverseすなわちI に沿って見てみよう。ここで、アポーハ代数は一般に高々可算無限個の語からなる語群で構成可能であり、そのとき対象領域の対象の個数は（可算個に限定されない）無限であってよいことは明らかであろう。また我々は無名の対象を認めることにする[17)]。

我々のuniverse $I = I_0 \cup \{M(U_i)\}$（i=1, 2, 3,...）（I_0はカントール集合）は次のような特徴を持つ。

1）I_0の要素以外の各対象は、唯一の最低種U_iに属し、複数の最低種に属することはない。

2）種（類）は有限個の最低種から成る。そのとき、種（類）は最低種の上位種である。

3）I_0の要素は無名である。

いま、たとえば種PがU_1とU_2を下位種に持ち、種QがU_2とU_3を下位種に持つとする。このとき、語群は次のようになる。

	... S_κ	... S_λ	... S_μ	... S_ν	... S_0
U_1	... ○	... ×	... ×	... ×	... ×
U_2	... ×	... ○	... ×	... ×	... ×
U_3	... ×	... ×	... ○	... ×	... ×
U_4	... ×	... ×	... ×	... ○	... ×
・					
・					
P	... ○	... ○	... ×	... ×	... ×
Q	... ×	... ○	... ○	... ×	... ×

$S_\kappa \in M(U_1), S_\lambda \in M(U_2), S_\mu \in M（U_3）, S_\nu \in M(U_4), S_0 \in I_0.$

この語群から得られるアポーハ代数上のいくつかの付値は次のようになる。

$[U_1]=\{U_1\}, [U_2]=\{U_2\}, [U_3]=\{U_3\}, [U_4]=\{U_4\}, [P]=\{P,U_1,U_2\}, [Q]=\{Q,U_2,U_3\}.$

$[nonU_1]=\{Q,U_2,U_3,U_4,..\}, [nonU_2]=\{U_1,U_3,U_4,...\}, [nonU_3]=\{P,U_1,U_2,U_4,..\},$

$[nonU_4]=\{P,Q,U_1,U_2,U_3,...\}, [nonP]=\{U_3,U_4,...\}, [nonQ]=\{U_1,U_4,...\},$

$[nonnonU_i]=\{U_i\}=[U_i]$（i=1,2,...）$,[nonnonP]=\{P,U_1,U_2\}=[P],[nonnonQ]=\{Q,U_2,U_3\}=[Q].$

ここで明らかなように、Qは $[P] \cup [nonP]$ の要素ではない。つまりこの語群は付値について排中律が成り立たない。（二重否定除去は成立する―後述。）一方、外延については、$h[nonP]=h(\{U_3, U_4,...\})=M(U_3) \cup M(U_4) \cup ..., h[P]=M(U_1) \cup M(U_2)$ であるから、nonPの外延はPの外延に含まれないすべての最低種の外延の和集合になる。Qについても同様である。また、明らかに、$nonU_i$ の外延はU_i 以外の最低種の外延の和集合である（ i = 1, 2, ...）。

この語群では種名Xについて、その否定名辞nonXの外延はh [nonX]（=hgh [X]）すなわち、Xの外延に含まれない最低種の外延の和集合として得られるのであり、おのずと無名の対象は

含まれない。

４　ＰかつＱ ― ∧について ―

次の二つの語群表を考える。

	イ	ロ	ハ
P	○	○	×
Q	×	○	○

語群表１

	イ	ロ	ハ
P	○	○	×
Q	×	○	×
R	×	○	×

語群表２

語群表１から次のオイラー図１が、語群表２からはオイラー図２が描ける。

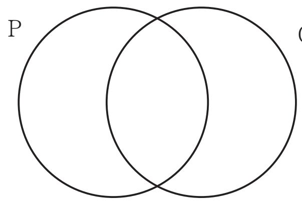


図１

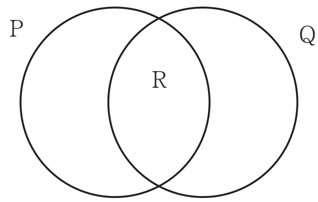


図２

語群表１から得られるアポーハ代数において、$[P]=\{P\}$, $[Q]=\{Q\}$. 従って、$[P\wedge Q]=[P]\cap[Q]=\phi$.
語群表２から得られるアポーハ代数において、$[P]=\{P,R\}$, $[Q]=\{Q,R\}$. 従って、$[P\wedge Q]=[P]\cap[Q]=\{R\}$.
語群表１（図１）で、$M(P)\cap M(Q)=\{$ロ$\}$であるが、アポーハ代数における（拡大された）語Ｐ∧Ｑの「外延」は$h[P\wedge Q]=\phi$であるから、対象ロはＰ∧Ｑの「外延」に含まれない。対象ロは語Ｐの外延$M(P)$と語Ｑの外延$M(Q)$の共通部分に含まれる一方、拡大された語であるＰ∧Ｑの「外延」には含まれない。従って「Ｐ∧Ｑ」の意味は通常のＰ∧Ｑの構文的意味とはズレていると言わざるを得ないであろう。

一方、語群表２（図２）の場合、$h[P\wedge Q]=h\{R\}=M(R)$であるから、Ｒは種としてＰとＱに含まれている（ＰおよびＱはＲの上位種である）と言うことができる。

一般に、所与の語群をωとするとき、次のこと（＊）が成り立つ。

（＊）$A, B\in\omega$とする。$\exists X\in\omega\ (h[X]\subseteq h[A]\cap h[B]) \Leftrightarrow [A]\cap[B]\neq\phi$.

証明。

まず ⇒ を証明する。

ωの要素Ｘが存在して、$h[X]\subseteq h[A]\cap h[B]$とする。$[A]=gD(A)$だから、$\neg(X\in[A]) \Leftrightarrow h[X]\cap D(A)\neq\phi$.

つまり、$X\in[A] \Leftrightarrow h[X]\cap D(A)=\phi$

$\Leftrightarrow$ h[X]∩(h[A])^{C} = ϕ

$\Leftrightarrow$ h[X]⊆h[A]

よって、h[X]⊆h[A]より、X∈[A].

同様に、X∈[B]. 従って、X∈[A]∩[B].ゆえに、[A]∩[B] ≠ ϕ .

逆の証明。

[A]∩[B] ≠ ϕ より、或る X∈ωが存在して、X∈[A]∩[B]. このXについて、X∈[A]より、h[X]⊆h[A]. 同様に、このXについてh[X]⊆h [B]. ゆえに、h[X]⊆h[A]∩h[B].

証明終わり。

いま（＊）におけるX∈ωをAとBの共通の下位種と呼ぶことにする。すると、

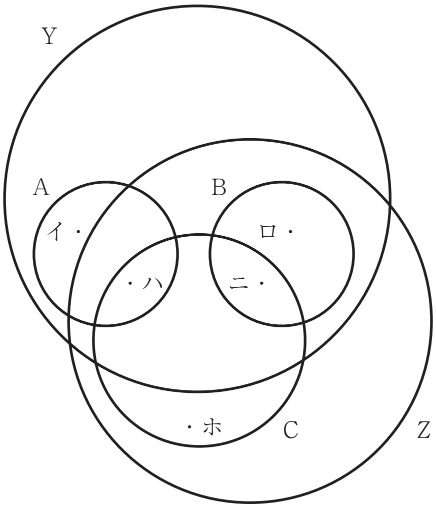
（＊＊）　A, B∈ωについて、AとBの共通の下位種が存在する　$\Leftrightarrow$　[A∧B] ≠ ϕ .

これより、次のことが言える。

Z∈[A∧B] $\Leftrightarrow$ Zは種として上位種AとBに含まれる。

つまり、[A∧B]は、AでもありBでもある種の名前（一般的には複数）を意味する。

一方、次のオイラー図を取りあげる。



これは例えば次の語群表から得られる。

	イ	ロ	ハ	ニ	ホ
A	○	×	○	×	×
B	×	○	×	○	×
C	×	×	○	○	○
Y	○	○	○	○	×
Z	×	○	○	○	○

この語群表における各語の付値は次のようになる。

[A]={A}, [B]={B}, [C]={C}, [Y]={A, B, Y}, [Z]={B, C, Z}.

従って、[Y∧Z] =[Y]∩[Z]={B}. よって、h([Y∧Z]) =h([Y]∩[Z]) =h({B})={ロ、ニ}. 一方、h([Y])∩h([Z])={ロ、ハ、ニ}. ゆえに、h([Y]∩[Z])≠h([Y])∩h([Z]).

つまり、対象ハは語Yの外延と語Zの外延の共通部分に含まれる一方、拡大された語であるY∧Zの「外延」には含まれない。これはYとZの共通の下位種がBであるが、対象ハはM(B) の要素ではないからである。アポーハ代数的には「Y∧Z」はYとZの共通の下位種として読む必要がある。

我々が先に設定したuniverse I においては種名は悉く所与の語群ωに含まれ、各U_iが最低種であるから、一般的な種P, Q∈ωについて、(M(P)∩M(Q)=ϕでない限り) PとQは共通の下位種を含んでおり、「P∧Q」のアポーハ代数的な意味は常に保たれている。

[むすび]

Universe Iは次のような特徴を持っている。

(1) 任意の種Pについて、その外延M(P) と否定名辞not-P／nonPの外延M(not-P) ／h[nonP]が存在する、すなわちKeynesの要請が満たされる。ただし、否定名辞は種名にはならない。

(2) 任意の種Pについて、カントール集合I_0 ⊂ M(not-P)=M(P)^C である。一方、アポーハ代数による否定名辞nonPの外延h[nonP] (=hgh[P]) はI_0と交わらない。

(3) 任意の種P, Qについて、「P∧Q」(「PかつQ」) は、アポーハ代数的解釈によって、PとQに共通な下位種を意味する。

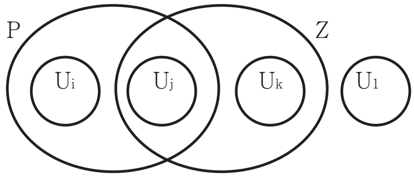
(4) 任意の種Pについて、[nonnonP]=[P]. 従って、h[nonnonP]=h[P]=M(P)[18]。

(1), (2), (3) はこれまで述べてきたことから明らかである。(4) について以下証明する。

(4) の証明。

第3節の (1a) より、外延の一部分のみを語Pと共有する語のみが、[P]にも[nonP]にも含まれない。一方、[nonnonP] = [P] が成り立つための必要十分条件は、[P]にも[nonP]にも含まれない任意の語Z∈ωについてM(Z)∩h[nonP]≠ϕとなることであるが (上田・平林, 定理4.3)、universe Iにおいてはどの種も最低種から構成されているから、<u>[P]にも[nonP]にも含まれない任意の語Z∈ωの外延は、[nonP]に含まれる最低種の少なくとも一つの外延を含む</u>。よって、M(Z)∩h[nonP]≠ϕ. 従って[nonnonP] = [P].

下線部の意味は、例えば次のオイラー図において、[P] ({U_i, U_j, …}) にも[nonP] ({U_k, U_l, …}) にも含まれない語Zについて M(Z)∩h[nonP]⊇M(U_k)≠ϕということである。



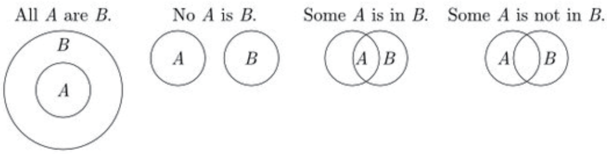
（4）の証明終わり

名辞Pについて、その否定名辞nonPの外延を、[nonP] = No Z is PとなるZすべての集合（Zは論議領域上の種名）を介して、h[nonP]と定めることができる。このようなアポーハ論的否定による解釈においては、補集合による解釈と異なり、対象の全体集合は顕在化せず、各々の種名の外延をのみ考慮すればよい。また、この否定は論議領域のモデルuniverse *I*上では外延に関して二重否定除去が成り立つ否定（h[nonnonP] = h[P]）、その意味では古典論理的否定であることに注意すべきであろう。

【注】

1）定立的否定／非定立的否定の他に、相対的否定／絶対的否定、にあらずの否定／なしの否定など、インド思想の研究者の間で多くの訳語（解釈）がある。

2）オイラー自身の図は“Lettres à une princesse d'Allemagne”（1768）に登場するといわれるが（未見）、Stanford Encyclopedia of Philosophy（http://plato.stanford.edu/entries/diagrams/）にはオイラー自身の図が次のように紹介されている。



ここに「全体集合」は（図形としては）描かれていない。J.M.Bochenski（1956）によれば、オイラー以前にライプニッツが三段論法を三個の円を用いて解釈しているが、そこにも「全体集合」は描かれていない。オイラーより後ヴェン（Venn）はクラス（Klasse）が三個より多い場合も扱う中で、円の代わりに楕円を用い、また空でない部分を星印によって印づけたが（Bochenskiはライプニッツ自筆の図を写真版で載せ、さらにヴェンの図を「活字」で再現している）、いずれも「全体集合」を表す図形（長方形や円による外枠）は描かれない。

3）*Logic part I.* Cf. http://archive.org/stream/logic01john.

4）クラス（class）が存在するとはそのクラスに属する対象が少なくとも一つ存在することであると考えられる。なお、この引用における前提（assumption）は伝統的な論理学（the traditional treatment of logic）における暗黙の前提であったとKeynesは言う（ibid., p.93, n.1）。

5）論議領域（universe）が限定されているからといって、否定名辞が表示するクラスが常に有意味であるとは限らない。たとえば、色彩のuniverseを考えるとき、「非青」は青以外の色を表すであろうが、赤色や黄色と異なり、非青は一つの色種というわけにはいかないであろう。もし「非青」という色彩があるとするならば、それはどのような属性を持つのであろうか（「青に非ず」というのは

青を青たらしめる属性―そのような属性が存在するとして―と同列に論ずることのできる属性であろうか)。同様に、冒頭で述べたようにインド論理学では、たとえば「非バラモン」(a-brāhmaṇa)の意味は否定辞(a-)を定立的否定と解釈すれば、クシャトリヤやヴァイシャといったヴァルナ(カースト)であるが、「非バラモン」はそのままでは特定のヴァルナに限定されない。「非バラモン」は「非青」と似た状況にある(「バラモンに非ず」という属性はヴァルナを特定するには不十分である)。

6)De Morganはusually called contradictoryとして“contrary”を用いている(cf.p.14)。

7)述語論理学では言語(構文)の意味解釈が行われる集合U(領域、Domain)の要素u,v, …に対して構文上の名前<u>u</u>, <u>v</u>, …を対応させるといったことが行われる(小野 p.66)。本論で言う「名前」はそのようなDomain上の対象の名前(固有名)ではなく、述語論理学的には対象xに関する一項述語「(xは)名前Pを持つ」に対応する。「xは名前Pを持つ」ことの否定は直ちに「xは名前not-Pを持つ」ことを意味しない。

8)Universeに一個の名前を付して、その名前がすべての対象(object)の名前になることは、不要なこととしてde Morganは次のようにこれを避けている。By the *universe* (of a proposition) is meant the collection of all objects which are contemplated as objects about which assertion or denial may take place. *Let every name which belongs to the whole universe be excluded as needless*: this must be particularly remembered. (*Syllabus*, §16. イタリックは原文) さらに次のようにも述べる。I have, §16, required that no term shall be introduced which fills the whole universe. In common logic, with an unlimited universe, there is really no name as extensive as the universe except *object of thought*. (Ibid., commentary on §69.)

9)Shin(1994, p.36)によると、Lambertは特称命題の主語については点線(dots)を用いている。

10)数学的には「カントール集合の外測度=0」と表現される。(寺澤p.39参照)

11)インド論理学には、牛の下位区分である斑牛(śābaleya)および黒牛(bāhuleya)は、もはやそれぞれの下位区分を持たないとする立場が存在した(吉水2014, 注15参照)。これは、斑牛および黒牛をそれぞれ最低種と見る立場と言えよう。

12)須藤(1971, p.28)

13)論議領域(universe)に設定される種名は伝統的論理学においては有限個であると考えられる。従って、厳密には最低種の個数に応じてuniverseは区間Iの何らかの部分に制限される(有限モデル)。区間I全体をuniverseとして無限個の最低種を設定する本論のモデルは、いわば論議領域の可算無限モデルである。

14)ラバ(騾馬)は雄ロバと雌馬の交配によって生まれるが、ラバは繁殖力がなく、ラバからラバは生まれない。すると、名辞Pについて「PはPから生まれる」ことをPが種名であるための必要条件とするとき、「ラバ」は種名ではない。さらに、1)universeにおける対象(個体)がロバと馬とラバだけであるとする。このとき、「not-ロバ」の外延は「馬」の外延とラバどもであり、また「not-馬」の外延は「ロバ」の外延とラバどもである(このときKeynesの要請が満たされる)。このuniverse(と種名構造)において、ラバどもは種名を持たない、すなわち無名となる。2)さらに今、「ロバ」および「馬」の上位区分として「動物」を(種名構造に)追加する(この際Keynesの要請を満たすために、「not-動物」の外延、すなわち「植物」等の外延をuniverseに含める必要がある)。すると、「動物は動物から生まれる」および「ラバは動物である」はともに真と見なせるから、個々のラバは「動物」なる種名を持つと言える。しかし「動物」は最低種名ではない。従って、個々のラバはいずれの最低種にも属さないが上位種(動物)には属することになる。本文における(開線分を用いた)モデルIは、2)のようなケースには妥当しない。なお、モデルIにおいて論議領域に無名の対象(すなわち種名を持たない対象)が存在しうる点は伝統的論理学からの逸脱であるかも知れない。

15)アポーハ代数とは、アポーハ論―語の意味を「他の排除(apoha)」とするインド仏教僧ディグナーガ(陳那, 5-6世紀)の言語理論―に基づく、語の意味の数理モデルに関連して得られる束(lattice)であり、集合演算∪, ∩, および本文で定義される合成関数ghに関して閉じている。詳しくは上田・

平林（2012）を参照。また、「アポーハ代数」の背景にあるディグナーガのアポーハ論については上田（2013）— 拙論p.435のg(α)はgh(α)に要訂正—を参照。

16）定義の（1）により、[X]の補集合（ω－[X]）は、外延が語Xの排除対象D(X)と交わる語の集合すなわち{Z∈ω｜M(Z)∩D(X)≠φ}を表す。アポーハ論の言う「他の排除」（＝ 語の意味）をこの（下線の）意味で解釈することができると思われる。アポーハ代数と名付ける所以である。

17）上田・平林（2012）では、どの対象も少なくとも一つの語の外延に含まれるとの前提下でアポーハ代数を考えたが、今はその前提を外す。

18）Pが拡大された語（論理式）の場合、universe *I* において、[nonnonP]=[P]は必ずしも成り立たないが、h[nonnonP]=h[P]は成り立つ。詳細は別稿を期す。

【参考文献】

Bochenski, J.M. 1956. *Formale Logik.* Alber, 4.Aufl. 1978（1.Aufl. 1956）.

De Morgan, A. 1860. *Syllabus of Aproposed System of Logic.* London, Walton and Maberly.

Keynes, J.N. *Studies and exercises in formal logic*, third ed. 1894（first edition 1884）.

Prior, A.N. 1962. *Formal Logic*, 2nd ed. Oxford.

Shin, Sun-Joo 1994. *The Logical Status of Diagrams.* Cambridge University Press.

上田昇・平林隆一 2012.「アポーハ代数とそのグラフ理論的解釈」目白大学経営学研究Vol.10

上田昇 2013「アポーハ論的「排除」について」印度学仏教学研究62-1

小野寛晰1994『情報科学における論理』日本評論社

須藤新吉『論理学綱要』改訂版 1971（初版1926）.

寺澤順『はじめてのルベーグ積分』日本評論社2009

松本幸夫『トポロジー入門』岩波1985（オンデマンド版2012）.

吉水清孝 2012「クマーリラにおける個体中心の存在論」『インド論理学研究Ｖ』山喜房佛書林

（平成26年11月4日受理）